

高密度ポリエチレンの粘塑性構成式

佐野村 幸夫* 水野 衛**

Viscoplastic Constitutive Equation of High-Density Polyethylene

by

Yukio SANOMURA* and Mamoru MIZUNO**

In this study, a viscoplastic constitutive equation based on the kinematic hardening creep theory of Malinin-Khadjinsky and the nonlinear kinematic hardening rule of Armstrong-Frederick is formulated to describe the inelastic behavior of high-density polyethylene under various loading. The gentle progress of back stress by the introduction of loading surface in the viscoplastic strain space and smaller material constant under unloading can be expressed. Material constants are identified by various stress-strain curves under compression at constant strain rate and creep curves under compression at constant stress. The viscoplastic model can describe stress-strain curve under compression with change in strain rate and shear stress-strain curve including unloading. The model can qualitatively describe stress-strain curves under compression with changed strain rate including unloading, but it is quantitatively insufficient. There are some problems on the behavior in the reloading predicted by this model.

Key words:

1 緒 言

高分子材料は一般に、室温でさえひずみ速度依存性が著しい。この粘塑性的な力学的挙動を記述するために、これまでKrempfの過応力理論⁽¹⁾が高分子材料に適用されている⁽²⁾⁽³⁾。これによって、一定ひずみ速度ならびにひずみ速度急変下の応力-ひずみ曲線、応力緩和挙動、クリープ曲線などの力学的挙動が精度よく記述できる。しかし、応力反転やひずみ反転を伴う力学的挙動は、十分に記述できない。このためKrempfとHo⁽⁴⁾は、高分子材料の除荷過程に見られる顕著なひずみ回復挙動を表現するために、過応力理論を修正した。

一方、村上らはCFRPの非弾性変形を記述するために、Malinin-Khadjinskyの移動硬化クリープ理論⁽⁵⁾とArmstrong-Frederickの非線形移動硬化理論⁽⁶⁾を組合せた非弾性構成式を提案している⁽⁷⁾⁽⁸⁾。ここで負荷方向反転直後に生じる顕著なひずみ回復を表現するために、背応力の発展式が修正され、精密化された⁽⁸⁾。同様な非弾性構成式と背応力の発展式は、CFRPの母材であるエポキシ樹脂に対しても適用できる⁽⁹⁾。

本研究では、結晶性高分子材料である高密度ポリエチレンの非弾性変形挙動⁽³⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を記述するために、Malinin-Khadjinskyの移動硬化クリープ理論とArmstrong-Frederickの非線形移動硬化理論を組合せた

粘塑性構成式を適用する。ただし、ひずみ反転後の著しいひずみ回復挙動を記述するために、背応力の発展式の修正を提案する。

2.粘塑性構成式

簡単のために微小変形を仮定する。まず材料の全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は、弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ と粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^v$ の和として次のように表す。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^v \quad (1)$$

ここで材料の弾性変形は Hooke の法則に従うものとするれば

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

と書ける。なお E と ν は、それぞれ縦弾性係数ならびにポアソン比を表す。

次に、Malinin-Khadjinsky の移動硬化クリープ理論を粘塑性変形に適用する。まず、粘塑性変形の静水圧非依存性と非圧縮性を仮定する。さらに次のような粘塑性ポテンシャル

$$g = \frac{1}{2} \xi_{ij} \xi_{ij} \quad (3)$$

+ 原稿受理 平成 年 月 日 Received

* 正 会 員 玉川大学工学部機械工学科 〒194-8610 町田市玉川学園6-1-1, Dept. of Mech. Eng., Tamagawa Univ., Machida, Tokyo, 194-8610

** 正 会 員 秋田県立大学システム科学技術学部機械知能システム学科 〒015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口84-4, Dep. of Mach. Intell. Sys. Eng., Akita Prefectural Univ., 84-4, Ebinokuchi, Tuchiya, Honjo, 015-0055

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^v = A \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = A \xi_{ij} \quad (4)$$

ここで, \cdot は応力 σ_{ij} および負荷履歴に依存する正值のスカラ関数であり, ξ_{ij} は有効応力と呼ばれ, 次式で定義される.

$$\xi_{ij} = s_{ij} - a_{ij} \quad (5)$$

ただし a_{ij} は, 背応力 α_{ij} の偏差量を表す. したがって, a_{ij} は偏差応力空間 s_{ij} での粘塑性ポテンシャル面の中心を表す. 相当有効応力と相当粘塑性ひずみ速度を

$$\bar{\xi} = \left(\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij} \right)^{1/2}, \quad \bar{\varepsilon}^v = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^v \dot{\varepsilon}_{ij}^v \right)^{1/2} \quad (6)$$

と定義すれば, 式(4)は次のように書ける.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^v = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}^v}{\bar{\xi}} \xi_{ij} \quad (7)$$

さらに, 相当有効応力と相当粘塑性ひずみ速度の関係は次のような Soderberg の関係式に従うと仮定する.

$$\bar{\varepsilon}^v = n \left\{ \exp \left(\frac{\bar{\xi}}{K} \right) - 1 \right\} \quad (8)$$

ここで, n と K は材料定数である.

最後に, 背応力の発展式を線形項と非線形項の和で表し, 非線形項に対して Armstrong-Frederick の移動硬化則を用いれば, 背応力の発展式は次のように表される.

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij}^{(1)} + \dot{\alpha}_{ij}^{(2)} \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(1)} = A \dot{\varepsilon}_{ij}^v \quad (10)$$

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(2)} = b_1 (C \dot{\varepsilon}_{ij}^v - \alpha_{ij}^{(2)} \bar{\varepsilon}^v) \quad (11)$$

ここで, A , b_1 , C は材料定数である.

3. 発展式の修正

ひずみ反転を伴う非弾性挙動を記述できるように, 背応力の発展式を修正する. まず負荷時と除荷時では, 背応力の非線形項の発展速度が異なると仮定する. そこで, 粘塑性構成式においても負荷・除荷の判定ができるように, 粘塑性ひずみ空間に次のような負荷曲面を導入する.

$$f = \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^v \varepsilon_{ij}^v - \rho^2 = 0 \quad (12)$$

ここで, ρ は超球面で表現した負荷曲面の半径を表す. その発展式を次式で仮定する.

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \dot{\varepsilon}^v = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{kl}^v \dot{\varepsilon}_{kl}^v}{\varepsilon^v} & f = 0 \text{ and } n_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^v \geq 0 \text{ loading} \\ 0 & f < 0 \text{ or } n_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^v < 0 \text{ unloading} \end{cases} \quad (13a)$$

$$n_{ij} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^v}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^v} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^v} \right]^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\varepsilon_{ij}^v}{\varepsilon^v} \quad (13b)$$

同様に, 背応力の発展式を次のように仮定する.

$$\dot{\alpha}_{ij}^{(2)} = \begin{cases} b_1 (C \dot{\varepsilon}_{ij}^v - \alpha_{ij}^{(2)} \bar{\varepsilon}^v) & \text{loading} \\ b_2 (C \dot{\varepsilon}_{ij}^v - \alpha_{ij}^{(2)} \bar{\varepsilon}^v) & \text{unloading} \end{cases} \quad (14)$$

ここで, b_2 は材料定数であり, 除荷過程の曲線を記述するように決定すればよい. 一般に b_2 の値を負荷過程における b_1 よりも小さな値にすれば除荷過程に見られる背応力の緩やかな発展を表現できる.

4. 計算結果と実験結果との比較

4.1 単軸圧縮応力下での力学的挙動

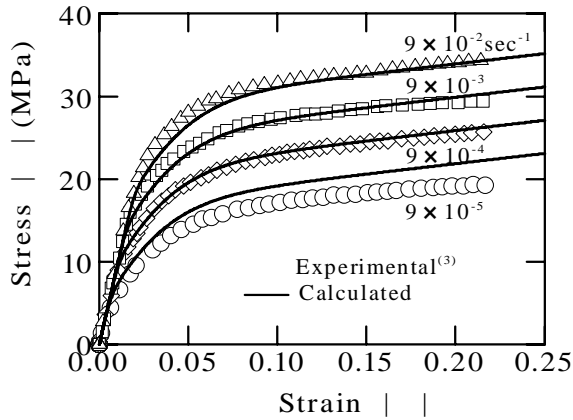
最初に, 高密度ポリエチレンの圧縮応力-ひずみ曲線とクリープ曲線を記述するような材料定数を定める. 単軸引張りおよび単軸圧縮における応力を \cdot , 粘塑性ひずみを \cdot^v とすれば, 次式となる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma, & \text{その他の } \sigma_{ij} &= 0 \\ \varepsilon_{11}^v &= \varepsilon^v, \varepsilon_{22}^v = \varepsilon_{33}^v = -\frac{1}{2} \varepsilon^v, & \text{その他の } \varepsilon_{ij}^v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

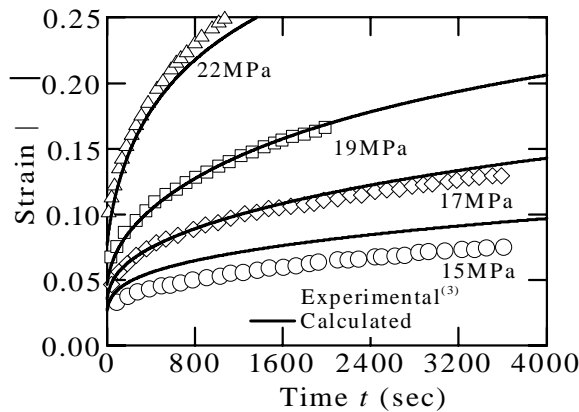
式(5) - (11)を単軸状態について展開すれば, 次式のように表現できる.

$$\left. \begin{aligned} \xi_{11} &= s_{11} - a_{11} = \frac{2}{3} (\sigma - \alpha_{11} + \alpha_{22}) \\ \xi_{22} &= \xi_{33} = -\frac{1}{3} (\sigma - \alpha_{11} + \alpha_{22}) \\ \bar{\xi} &= |\sigma - \alpha_{11} + \alpha_{22}| \\ \dot{\varepsilon}^v &= n \left\{ \exp \left(\frac{|\sigma - \alpha_{11} + \alpha_{22}|}{K} \right) - 1 \right\} \text{sgn}(\sigma - \alpha_{11} + \alpha_{22}) \\ \dot{\alpha}_{11} &= \dot{\alpha}_{11}^{(1)} + \dot{\alpha}_{11}^{(2)} \\ \dot{\alpha}_{11}^{(1)} &= A \dot{\varepsilon}_{11}^v \\ \dot{\alpha}_{11}^{(2)} &= b_1 (C \dot{\varepsilon}_{11}^v - \alpha_{11}^{(2)} |\dot{\varepsilon}_{11}^v|) \\ \dot{\alpha}_{22} &= \dot{\alpha}_{33} = \dot{\alpha}_{22}^{(1)} + \dot{\alpha}_{22}^{(2)} \\ \dot{\alpha}_{22}^{(1)} &= -\frac{1}{2} A \dot{\varepsilon}_{11}^v \\ \dot{\alpha}_{22}^{(2)} &= b \left(-\frac{1}{2} C \dot{\varepsilon}_{11}^v - \alpha_{22}^{(2)} |\dot{\varepsilon}_{11}^v| \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Fig.1(a)(b)は, 実験結果に対する計算結果の当てはめを示す. 図中の各記号と実線は, それぞれ実験結果⁽³⁾と次の材料定数を用いた計算結果を表す.



(a) Stress-strain curves under compression at constant strain rate.



(b) Creep curves under compression at constant stress.
Fig. 1 Identification of material constants.

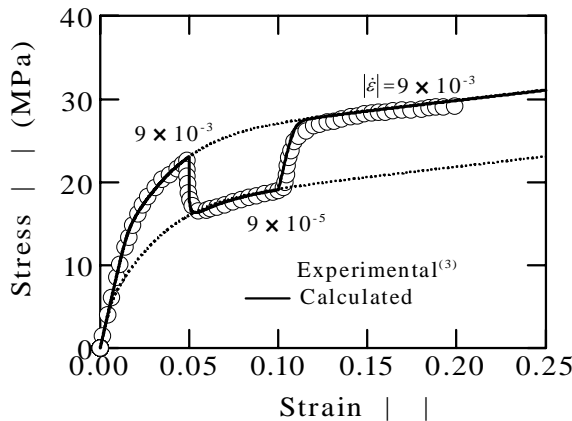


Fig. 2 Stress-strain curve under compression with change in strain rate.

$$\left. \begin{aligned} E &= 952 \text{MPa}, A = 17.0 \text{MPa} \\ b_1 &= 50.0, C = 7.0 \text{MPa} \\ K &= 1.80 \text{MPa}, n = 2.00 \times 10^{-6} \text{sec}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

図から本粘塑性構成式モデルは、種々のひずみ速度における圧縮応力 - 圧縮ひずみ曲線とクリープ曲線を精度よく記述できることがわかる。なお Fig.1(b)は、ひずみ速度 $|\dot{\epsilon}| = 9 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$ で単軸圧縮後、所定の応力値が一定となるように制御して得られたクリープ曲線である。

次に、Fig.2は単軸圧縮試験中にひずみ速度が変化する場合の応力 - ひずみ曲線を示す。ひずみ速度は、ひずみ 0.05 で $|\dot{\epsilon}| = 9 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ から $9 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$ へ減少

し、ひずみ 0.10 で $9 \times 10^{-5} \text{sec}^{-1}$ から $9 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ へ増加する。図中の各記号と実線は、それぞれ実験結果と対応する計算結果を示す。図から本粘塑性構成式は、変動するひずみ速度の下での実験結果を精度よく記述できることがわかる。

4.2 反転ねじり

反転ねじりでのねじりの応力とねじりひずみを計算する。せん断応力を \cdot 、粘塑性せん断ひずみを $\cdot\cdot$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \tau, \quad \text{その他の} \sigma_{ij} = 0 \\ \epsilon_{12}^v &= \epsilon_{21}^v = \frac{1}{2} \gamma^v, \quad \text{その他の} \epsilon_{ij}^v = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

このとき、式(5) - (14)をねじり状態について展開すれば、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_{12} &= \tau - \alpha_{12} \\ \bar{\xi} &= \sqrt{3} |\tau - \alpha_{12}| \\ \dot{\gamma}^v &= 2\dot{\epsilon}_{12}^v = \sqrt{3} n \left\{ \exp\left(\frac{\sqrt{3} |\tau - \alpha_{12}|}{K}\right) - 1 \right\} \text{sgn}(\tau - \alpha_{12}) \\ \dot{\alpha}_{12} &= \dot{\alpha}_{12}^{(1)} + \dot{\alpha}_{12}^{(2)} \\ \dot{\alpha}_{12}^{(1)} &= A \dot{\epsilon}_{12}^v = \frac{1}{2} A \dot{\gamma}^v \\ f &= \left(\frac{\dot{\gamma}^v}{\sqrt{3}}\right)^2 - \rho^2 = 0 \\ \dot{\rho} &= \begin{cases} \frac{\dot{\gamma}^v}{\sqrt{3}} \text{sgn}(\dot{\gamma}^v) & f = 0 \text{ and } \dot{\gamma}^v \text{sgn}(\dot{\gamma}^v) \geq 0 \text{ loading} \\ 0 & f < 0 \text{ or } \dot{\gamma}^v \text{sgn}(\dot{\gamma}^v) < 0 \text{ unloading} \end{cases} \\ \dot{\alpha}_{12}^{(2)} &= \begin{cases} b_1 \left(\frac{1}{2} C \dot{\gamma}^v - \alpha_{12}^{(2)} \frac{\dot{\gamma}^v}{\sqrt{3}}\right) & \text{loading} \\ b_2 \left(\frac{1}{2} C \dot{\gamma}^v - \alpha_{12}^{(2)} \frac{\dot{\gamma}^v}{\sqrt{3}}\right) & \text{unloading} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fig.3は、せん断ひずみ速度 $1.8 \times 10^{-3} \text{sec}^{-1}$ 一定、せん断ひずみ 0.13 でねじり反転したときのせん断応力 - せん断ひずみ曲線を示す。図中の記号と実線は、それぞれ実験結果⁽¹⁰⁾と対応する計算結果を示す。ここで、一点鎖線は $b_1 = b_2 = 50$ であり、Armstrong-Frederickの非線形移動硬化理論による計算結果と一致する。 $b_2 = 20$ としたとき、ほぼ実験結果を記述することがわかる。したがって、本

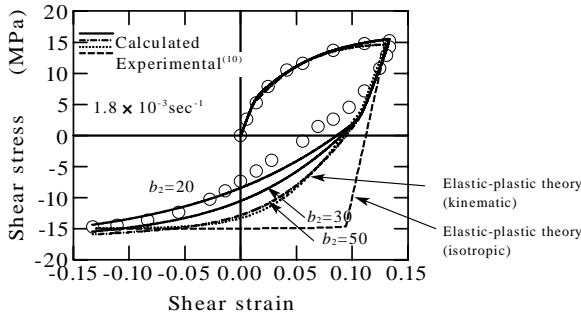


Fig. 3 Shear stress-strain curve including unloading.

粘塑性構成式によってひずみ反転を伴う非弾性挙動を表現できることがわかる。なお、横弾性係数 G と C は、 $G=470\text{MPa}$, $C=10\text{MPa}$ とした。Fig.1-2 の計算と異なる C の値を用いたのは、高密度ポリエチレンのグレードが、異なっている可能性があるかと判断したためである。なぜなら、もし同じグレードの材料であるならば、材料の等方性を仮定したときに、 $E=952\text{MPa}$ と $G=470\text{MPa}$ から計算されるポアソン比が 0.013 と非常に小さな値となり、通常測定されている値とは異なるためである。

また、図中の破線と点線は、それぞれ等方硬化および移動硬化理論に基づく次のような弾塑性構成式⁽¹²⁾⁽¹³⁾の計算結果を示す。

$$\left. \begin{aligned} \text{降伏関数} \quad & f = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - k = 0 \\ \text{塑性構成式} \quad & \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij} \dot{\sigma}_{kl}}{B(k^* - k) k^2} s_{ij} \\ \text{硬化変数の発展式} \quad & \dot{k} = B(k^* - k) \dot{\epsilon}^p \end{aligned} \right\} \text{(等方硬化理論)} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{降伏関数} \quad & f = \sqrt{\frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij})} - k_0 = 0 \\ \text{限界曲面} \quad & f^* = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^* s_{ij}^*} - k^* = 0 \\ \text{塑性構成式} \quad & \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{(s_{kl} - \alpha_{kl}) \dot{\sigma}_{kl}}{D[(k^* - k_0)k_0 - \frac{3}{2} \alpha_{mn}(s_{mn} - \alpha_{mn})]} \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{k_0} \\ \text{移動硬化変数の発展式} \quad & \dot{\alpha}_{ij} = D[\frac{3}{2} (k^* - k_0) \dot{\epsilon}_{ij}^p - \alpha_{ij} \dot{\epsilon}^p] \end{aligned} \right\} \text{(移動硬化理論)} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{材料定数} \quad & k_0 = 8.66\text{MPa}, k^* = 25.9\text{MPa} \\ & B = 60.0, \quad D = 60.0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

図のように、等方硬化を仮定した塑性理論では、反転ねじりにおけるひずみ回復挙動を全く記述できない。また、移動硬化理論を仮定した塑性理論は、Armstrong-Frederick の非線形移動硬化理論による計算結果とほぼ一致する。しかし、弾塑性理論では、ひずみ速度依存性を全く記述できないことに、注意する必要がある。

4.3 除荷挙動と再負荷挙動

Fig. 4 は、 $|\dot{\epsilon}| = 9 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ のひずみ速度で、

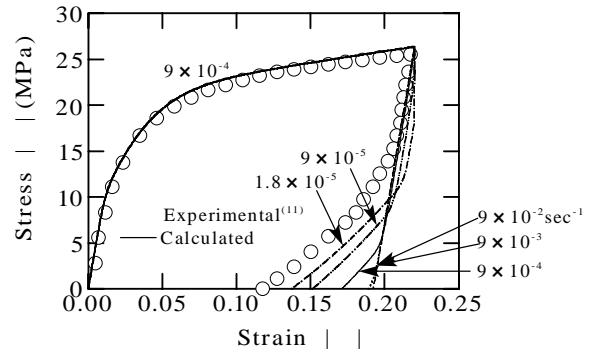


Fig. 4 Stress-strain curves under compression with changed strain rate including unloading.

$|\dot{\epsilon}| = 0.22$ まで単軸圧縮負荷した後、種々のひずみ速度で除荷を行ったときの計算結果と実験結果⁽¹¹⁾を示す。図面の煩雑さを避けるために、実験結果は、ひずみ速度 $|\dot{\epsilon}| = 9 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ で除荷したときの場合を示す。実験結果に見られる応力 - ひずみ曲線は、除荷時のひずみ速度に著しく影響する。高密度ポリエチレンの場合、ひずみ速度が小さくなるに伴って、ひずみ回復が大きくなる傾向にある。これに対して、計算結果は $|\dot{\epsilon}| = 9 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ における実験結果を表現するために、 $b_2 = 10$ とした。他の材料定数は、式(15)の値と同一である。本粘塑性構成式は、定性的には実験結果に見られる傾向を記述できるが、定量的にはまだ不十分である。

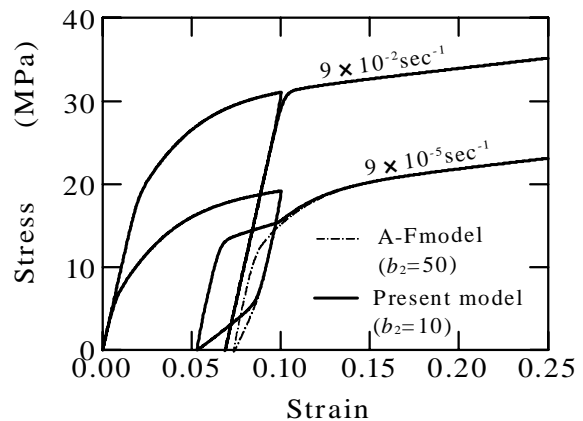


Fig. 5 Stress-strain curves including unloading and reloading at constant strain rate.

Fig.5 は、単軸引張りにおいて負荷-除荷-再負荷を行ったときの計算結果を示す。図中の実線と一点鎖線は、それぞれ本粘塑性構成式 ($b_2=10$) と Armstrong-Frederick の非線形移動硬化理論による計算結果を表す。大きなひずみ速度では、2つの計算結果は、ほぼ一致する。一方、

小さなひずみ速度では, 本粘塑性構成式は, Armstrong-Frederickの非線形移動硬化理論に比べて, 大きなひずみ回復を表現できる. しかし, 本粘塑性構成式では再負荷の初期の部分で除荷と判定するため, この部分での応力値を小さく見積もることになる.

5. 結論

本研究では, 高密度ポリエチレンの粘塑性変形挙動を精密に記述するために, Malinin-Khadjinskyの移動硬化クリープ理論と Armstrong-Frederickの非線形移動硬化理論を組合せた粘塑性構成式を定式化した. 特に, 粘塑性構成式においても負荷・除荷の判定ができるように, 粘塑性ひずみ空間に負荷曲面を導入し, 除荷過程での背応力の緩やかな発展を表現できるようにした. この粘塑性構成式を用いて, 高密度ポリエチレンの実験結果と比較した. まず, 種々のひずみ速度での応力-ひずみ曲線とクリープ曲線から材料定数を定めた. 次に, 途中でひずみ速度が, 変動する応力-ひずみ曲線を精度よく予測することができた. また, ねじり反転におけるひずみ回復挙動を予測することができた. しかし, 一定ひずみ速度で負荷した後, 種々のひずみ速度で除荷する場合には, 定性的に実験結果の傾向を記述できるけれども, 定量的にはまだ不十分であることがわかった. また, 再負荷時における挙動の予測も問題があることがわかった. 今後さらに発展式の修正が, 必要である.

謝辞

最後に, 高密度ポリエチレンについて多数の論文をご教示賜りました秋田県立大学 邱建輝助教授に深く感謝する. また, 本研究は日本塑性加工学会シミュレーション統合システム分科会構成式の開発と汎用有限要素法プ

ログラムへの組込み研究班の活動の一部である. さらに, 平成15年度玉川大学学術研究所研究活動等助成金を得た. 謹んでお礼申し上げる.

参考文献

- (1) Krempf, E., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Tech.*, 101 (1979), 380.
- (2) 有山 堯, 佐久間 通之, 金子 堅司, 機論 A, **58**-556(1992), 113.
- (3) 北川正義, 松谷智彦, 材料, **37**-423(1988), 1391.
- (4) Krempf, E. and Ho, K., ASTM 1357, (2000), 118.
- (5) Malinin, N. N. and Khadjinsky, *Int. J. Mech. Sci.*, **14**, (1972), 235.
- (6) Armstrong, P. J. and Frederick, C. O., CEBG Report, No. RD/B/N731 (1966).
- (7) 石居武之, 溝辺卓也, 水野衛, 村上澄男, 材料, **49**-2(2000), 157.
- (8) 石居武之, 溝辺卓也, 水野衛, 村上澄男, 材料, **50**-9(2001), 973.
- (9) 水野衛, 肥田政彦, 材料, **52**-3 (2003), 281.
- (10) 北川正義, 米山猛, 邱建輝, 西田憲一, 機論 A, **57**-539(1991), 1680.
- (11) 邱建輝, 北川正義, 富山県立大学紀要, **4**(1994), 92.
- (12) 佐野村幸夫, 材料, **50**-9(2001), 968.
- (13) 佐野村幸夫, 早川邦夫, 材料, **53**-2(2004), 143.